309. "*det.* $A \neq 0$ ナル *matrix* ハ $A = \exp. B$" ノ正田教授ニヨル証明其他

吉田 耕作(阪大)

先日正田教授ト *Schröder* ノ論文 *Einige Sätze aus der Theorie der kont. Gruppen linearer Transf., Dissertation, Berlin.* ヲミテヲリマシタラ

複素数体 K ノ上ノ n 次ノ *matrix* A ガ *det.* $A \neq 0$ ナラバ同ジク K ノ上ノ n 次ノ *matrix* B デ

$$A = \exp. B = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!}, \quad B^0 = E \text{ (単位行列)}$$

ナル如キモノガアル。

ヲ直接的ナ計算? デ示シテアリマシタ。正田教授ニヨレバ之ハ次ノ如キ考ヘ方デ簡単ニ証明出来マス。尚南雲教授ハ之ヲ"距離付ケラレタ *Ring*"ニ擴張サレマシタ(本紙論文)。以下ニ御紹介致シマス。

先ヅ $A = \exp. B$ ト書ケルカドウカハ A ヲ *transform* シテモ変ラナイ。何者、$PAP^{-1} = \exp. (PBP^{-1})$ ダカラ。又 A ニ *scalar* a ヲカケテモ変ラナイ。何者 $aA = (aE)A = \exp. \{(\log a)E\} A, = \exp. \{(\log a)E + B\}$ ($(\log a)E$ ハ全テノ *matrix* ト *commutative*) ダカラ。又

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

ナラバ A_1, A_2 ノミニツイテ証明スレバヨイ。何者 $A_1=exp.(B_1)$, $A_2=exp.(B_2)$,

$$B_1=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

トスレバ B_1 ト B_2 トハ *commutative* ダカラ

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}=exp.(B_1+B_2)$$

トナルカラ。

依ッテ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

ノトキノミ証明スル。A−E ハ *nilpotent*; $(A-E)^{n-1}=0$; ダカラ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(A-E)^{\nu}$$

ハ *convergent*. ヨッテ

$$exp.\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(A-E)^{\nu}\right)$$

ガ意味ヲ有シ之レハ A トナル。何者、$(A-E)^{\nu}$; $\nu=0,1,2,\cdots$ ——ハ互ニ *commutative* ダカラ, $|x-1|<1$ ナル *scalar* x ニ對シ

$$exp.\{ln[(1-x)^0-(1-x)]\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\left[(1-x)^{\circ}-(1-x)-1\right]^{\nu}\right\}$$

ヲ *formal* ＝ $(1-x)$ ノ *power series* ＝展開シタトキ

$$(1-x)^{\circ}-(1-x)=x$$

ヲ得ルコトニ比較スレバワカル。 ── 以上 ──

上ノ定理ニヨレバ本紙ニ於ケル正田教授ノ二ツノ論文（288, 295）ニヨルト K ニ於ケル *matrix equation*

$$\exp. A \exp. B \exp.(-A) \exp.(-B) = \exp.(CD-DC)$$

ハ A, B ヲ與ヘレバ C, D ガ、又 C, D ヲ與ヘレバ A, B ガ定マル（必ズシモ一意デナイ）如キモノデアルコトガワカル。

尚正田教授ハ次ノ如キ手紙ヲ寄セラレタ。

Satz. Determinate 1 ノ reelle Matrix ハ二ツノ reelle ナ Kommutator ノ Produkt トシテ表ハセル。

コレヲ証明スルノニ Hilfssätze カラ始メマス。

Hilfssatz 1. Körper K ノ中ノ Matrix ハ Eigenwert ガ K ニ含マレルナラ K ノ中ノ Kommutator デアル。

Beweis. 紙上談話會ニ書イタノニ同ジ。

Hilfssatz 2. Matrix $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ハ a ヲ含ム Körper ノ中ノ Kommutator デアル。

Beweis. $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

両方ノ Eigenwert ± 1

従ッテ $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ハ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ト或 Matrix ノ Kommutator デアル。

Hilfssatz 3. $\begin{pmatrix} \rho & \bar{\rho} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho & \bar{\rho} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \rho+\bar{\rho} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho\bar{\rho}=1$

Beweis. 計算ニヨリ明カ。

Satz ノ証明。

Matrix A ヲ reell ナ範囲デ Normalform

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

ニ transform シマス。$|xE-A_i|$ ハ irreduzibles Polynom ノ Potenz デス、コノ各々ニツイテ考ヘマス。

$|xE_i-A_2|$ ガ irreduzibles Polynom $\varphi_i(x)$ ノ Potenz デアルトスルト $\varphi(x)$ ノ grad ハ 1 カ 2 デス。

先ヅ $A_i = \alpha_i A_i^*$, $|A_i^*| = 1$ ナル實數 α ガ存在スルコトヲ証明シマス。

$\varphi(x)$ ノ Grad 1 ナラバ

$$A_i \sim \alpha_i F_i, \quad F_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad F_i = A_i^*.$$

$\varphi(x)$ ノ grad 2 ナラバ，$\varphi(x)=x^2+ax+b$，b ハ絶体値故 pos.

故ニ $|A_i|=\beta^{\frac{n}{2}}$，$n$ ノ matrix ノ grad，$\alpha_i=\sqrt{b}$ ト置ケバ

$$A_i \sim \alpha_i A_i^*$$

故ニ

$$A \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & & & \\ & \alpha_2 E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_m E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^* & & & \\ & A_2^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^* \end{pmatrix}$$

左側ノ Matrix ハ Hilfssatz 1 ニアル reell ナ Kommutator．問題ハ右辺ノ Matrix ガ Kommutator ナルコトヲ示スニアル。ソレニハ各々ノ A_i^* ニツイテ証明スレバヨイ。

$\varphi_i(x)$ ノ grad 1 ノトキハ矢張リ Hilfssatz 1 ニヨル Kommutator ニナル。

$\varphi_i(x)$ ノ grad ヲ 2 トスル．

$$A_i^* \sim B = \begin{pmatrix} \rho F & 0 \\ 0 & \bar{\rho} F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix} \times F \quad \text{(Kronecker ノ Produkt)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \rho+\bar{\rho} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times F \quad \text{(Hilfssatz 3)}$$

$$= M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1} \times N_1 N_2 N_1^{-1} N_2^{-1} \quad \text{(Hilfssatz 2, 1)}$$

$$= (M_1 \times N_1)(M_2 \times N_2)(M_1 \times N_1)^{-1}(M_2 \times N_2)^{-1}$$

コレデ証明出来マシタガ餘リ簡單デハアリマセンデシタ。

Schräder ハドンナニ証明シタカ知リマセンガ先ヅ御報告

申上マス。

昭和十年度七月――十二月分會費

未拂込ノ方ハ至急下記(振替貯金)

ヘ御拂込ミ下サイ。

(會費未納ノ方多キ爲ニ最近財政困難

デスカラ是非至急御願ヒ致シマス。)

大阪市北區

大阪帝國大學
理學部數學教室 清水辰次郎

口座番號　大阪一七七四三番

本誌上ニ於ケル論文ハナルベク10頁以内ニ御願ヒ致シマス。